

单元素养测评卷(一)

第一章

(时间:120 分钟 分值:150 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$, 点 M 为 A_1D_1 的中点, 则 $\overrightarrow{CM}$ 等于 ()

- A. $-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ B. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$
C. $-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ D. $-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$

2. [2025·浙江湖州高二期末] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1,1)$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 ()

- A. $(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$ B. $(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$
C. $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ D. $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

3. 已知 A, B, C 三点不共线, O 是平面 ABC 外任意一点, 若 $\overrightarrow{OM}=2\lambda\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$, 则 A, B, C, M 四点共面的充要条件是 ()

- A. $\lambda=\frac{13}{60}$ B. $\lambda=\frac{17}{60}$
C. $\lambda=-\frac{17}{60}$ D. $\lambda=-\frac{13}{60}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$, $\boldsymbol{b}=(x,2,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

5. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 已知 $A(-1,0,0)$, $B(1,2,-2)$, $C(0,0,-2)$, $D(2,2,-4)$, 则下列说法中错误的是 ()

- A. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=6$
B. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{6}$
C. A, B, C, D 四点共面
D. 点 O 到直线 AB 的距离是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 已知点 P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点(包括边界), 则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

7. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $SD\perp$ 平面 $ABCD$, 棱 AB, SC 的中点分别为 E, F , 若异面直线 EC 与 BF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $SD=$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 4 C. 2 D. 3

8. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 且法向量为 $\boldsymbol{m}=(A, B, C)$ 的平面的方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且一个方向向量为 $\boldsymbol{n}=(\mu, \nu, \omega)$ ($\mu\nu\omega\neq 0$) 的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{\mu}=\frac{y-y_0}{\nu}=\frac{z-z_0}{\omega}$. 根据上面的材料解决下面的问题: 现

给出平面 α 的方程为 $x-y+\sqrt{2}z-7=0$, 经过点 $(0,0,0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x}{-3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, 则直线 l 与平面 α 所成的角为 ()

- A. 60° B. 120°
C. 30° D. 45°

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 是共线向量
B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$
C. $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值是 $-\frac{\sqrt{55}}{11}$
D. 平面 ABC 的一个法向量是 $\boldsymbol{n}=(1,2,5)$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, Q 为 AA_1 上一动点, 则 ()

- A. 存在点 Q , 使得 BQ 与平面 B_1CD 垂直
B. 不存在点 Q , 使得 BQ 与平面 B_1CD 垂直
C. 存在点 Q , 使得 D_1Q 与平面 B_1CD 垂直
D. 不存在点 Q , 使得 D_1Q 与平面 B_1CD 垂直

11. 已知 m, n 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 m, n 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 则 ()

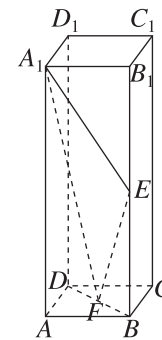
- A. 直线 AB 与 m 所成角的最小值为 $\frac{\pi}{4}$
B. 直线 AB 与 m 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
C. 当直线 AB 与 m 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ 时, AB 与 n 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$
D. 当直线 AB 与 m 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$ 时, AB 与 n 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 在空间直角坐标系中, 点 $M(2,1,-3)$ 关于 zOx 平面的对称点的坐标为 _____.

13. 在空间四面体 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$ _____.

14. [2025·河北张家口高二期末] 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $AA_1=6$, 点 F 为 BD 的中点, 点 E 为棱 BB_1 的中点, 则平面 A_1FE 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 _____.



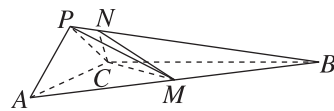
四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知空间中三点 $A(-1,1,2)$, $B(-1,2,4)$, $C(1,0,4)$.

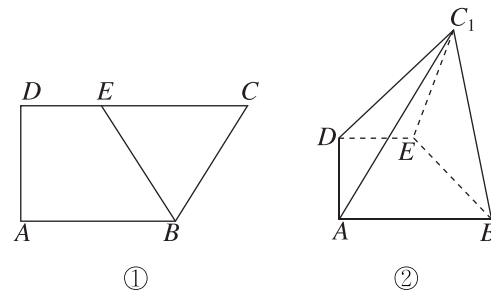
- (1) 若点 D (异于点 A, C) 在直线 AC 上, 且 $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$, 求点 D 的坐标;
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (15 分) 已知空间中的三点 $P(-2, 0, 2), M(-1, 1, 2), N(-3, 0, 4)$, $\overrightarrow{PM} = \mathbf{a}, \overrightarrow{PN} = \mathbf{b}$.
- (1) 当 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $k\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 的夹角为钝角时, 求 k 的取值范围;
- (2) 求点 M 到直线 PN 的距离.

17. (15 分) [2025 · 广东广州高二期中] 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\triangle PAC$ 为等腰直角三角形, $PA \perp PC, AC \perp BC$, $BC = 2AC = 4, M$ 为 AB 的中点.
- (1) 求证: $AC \perp PM$.
- (2) 求平面 CPA 与平面 PAB 所成角的余弦值.
- (3) 在棱 PB 上是否存在点 N 使得平面 $CMN \perp$ 平面 PAB ? 若存在, 求出 $\frac{PN}{PB}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



18. (17 分) 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle D = 90^\circ, AB = 2, CD = 3, \angle DCB = 60^\circ, E$ 在线段 CD 上, 且 $CE = 2ED$, 以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起, 使点 C 到达 C_1 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$, 如图②.
- (1) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$;
- (2) 在棱 DC_1 上存在点 P , 使得锐二面角 $P-BE-A$ 的大小为 45° , 求 C_1 到平面 PBE 的距离.



19. (17 分) [2025 · 黑龙江哈尔滨高二期末] 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑. 如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD, PD = DC, CB = CP, E$ 为棱 PC 的中点, F 为棱 PB 上一点, $FP < FB$, 连接 DB, DE, DF, EF .
- (1) 求证: $DE \perp$ 平面 PBC ;
- (2) 若 $EF \perp PB$, 连接 BE , 判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角; 若不是, 写出其不是直角三角形的面;
- (3) 延长 FE, BC 交于点 G , 连接 DG , 若二面角 $F-DG-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{PF}{PB}$.

